

- 1.(1M) Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο $x-y$ υπό την επίδραση του δυναμικού $U(x, y) = \varepsilon(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ με ε θετική σταθερά. Α) Αν οι συντεταγμένες x, y αντιστοιχούν μέτρα (m) ποιες είναι η μονάδες της σταθεράς ε ; Β) Υπολογίστε τη δύναμη, $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ που δέχεται το σωματίδιο σε μια τυχαία θέση του.

Προτεινόμενη Λύση

Α) Οι μονάδες της σταθεράς ε καθορίζονται από τη σχέση $\varepsilon = U(x, y) / (x^4 + x^2y^2 + y^4)$. Δεδομένου ότι το δυναμικό είναι σε μονάδες ενέργειας και ότι ο παρονομαστής του κλάσματος έχει μονάδες [μήκος]⁴ οι μονάδες της σταθεράς ε είναι [ενέργεια]/[μήκος]⁴.

Β) Γνωρίζουμε ότι $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ από όπου έχουμε

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\varepsilon(4x^3 + 2y^2x), \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\varepsilon(4y^3 + 2x^2y), \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Οπότε $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = -\varepsilon(4x^3 + 2y^2x)\mathbf{i} - \varepsilon(4y^3 + 2x^2y)\mathbf{j}$

- 2.(1M) Χορδή κυλινδρικής διατομής διαμέτρου $\sigma = 2\text{ mm}$ και αρχικού μήκους $l_0 = 50\text{ cm}$ εκτείνεται κατά 0.5 mm υπό την επίδραση αξονικής δύναμης μέτρου 900 N . Αν το υλικό βρίσκεται στην περιοχή της γραμμικής ελαστικότητας υπολογίστε το μέτρο ελαστικότητας (σταθερά του Young) του υλικού.

Προτεινόμενη Λύση

Στην περιοχή της γραμμικής ελαστικότητας γνωρίζουμε ότι ισχύει $E = Y\varepsilon$ όπου E η αξονική τάση, ε η παραμόρφωση και Y το μέτρο του Young του υλικού.

Έχουμε $E = F / A = F / (\pi(\sigma/2)^2) = \frac{4F}{\pi\sigma^2}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ οπότε $Y = \left(\frac{4F}{\pi\sigma^2}\right) / \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right) = \frac{4l_0 F}{\pi\sigma^2 \Delta l}$ αντικαθιστώντας

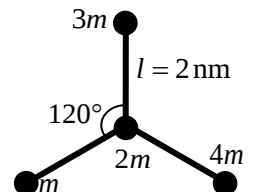
$F = 900\text{ N}$, $\Delta l = 0.5\text{ mm}$, $l_0 = 50 \times 10\text{ mm}$ και $\sigma = 2 \times 10^{-3}\text{ m}$ έχουμε

$$Y = 2.86 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2} = 2.86 \times 10^{11} \text{ Pa} = 286 \text{ GPa}$$

- 3.(1,5M) Θεωρείστε το διπλανό στερεό σώμα, που αποτελείται από τέσσερις συνεπίπεδες μάζες. Οι αποστάσεις της όλων των μαζών από την κεντρική μάζα είναι ίσες, $l = 2\text{ nm}$ και οι γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες ανά δύο είναι ίσες.

α) Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας (διάνυσμα) και σημειώστε επάνω στο σχήμα.

β) Ποια η ροπή αδράνειας περί του άξονα που ορίζεται από την κεντρική μάζα και τη μάζα $3m$;



Προτεινόμενη Λύση

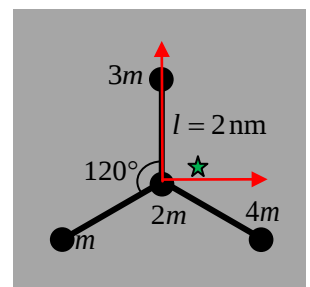
Στο σύστημα αναφορά που επισημαίνεται με τα κόκκινα διανύσματα τα διανύσματα θέσης των μαζών είναι

$$\mathbf{r}_{2m} = 0,$$

$$\mathbf{r}_{3m} = 0\mathbf{i} + l\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_{4m} = l \cos 30^\circ \mathbf{i} - l \sin 30^\circ \mathbf{j} \text{ και}$$

$$\mathbf{r}_m = -l \cos 30^\circ \mathbf{i} - l \sin 30^\circ \mathbf{j}.$$



α) Εξ ορισμού το διάνυσμα του κ.μ. είναι $\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$ και αντικαθιστώντας τις θέσεις των μαζών έχουμε:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_{\text{μαζές}} m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{1}{10m} (2m\mathbf{r}_{2m} + 1m\mathbf{r}_m + 3m\mathbf{r}_{3m} + 4m\mathbf{r}_{4m}) = \frac{1}{10} (\mathbf{r}_m + 3\mathbf{r}_{3m} + 4\mathbf{r}_{4m})$$

όμως

$$\mathbf{r}_m + 3\mathbf{r}_{3m} + 4\mathbf{r}_{4m} = -l \cos 30^\circ \mathbf{i} - l \sin 30^\circ \mathbf{j} + 3(0\mathbf{i} + l\mathbf{j}) + 4(l \cos 30^\circ \mathbf{i} - l \sin 30^\circ \mathbf{j}) =$$

$$3l \cos 30^\circ \mathbf{i} + l(3 - 5 \sin 30^\circ) \mathbf{j} = l \frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + l(3 - \frac{5}{2}) \mathbf{j} = l \frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{l}{2} \mathbf{j}$$

$$\text{Οπότε } \mathbf{r}_{cm} = l \frac{3\sqrt{3}}{20} \mathbf{i} + \frac{l}{20} \mathbf{j}$$

β) Η ροπή αδράνειας περί του άξονα που ορίζεται από την κεντρική μάζα και τη μάζα $3m$ είναι:

$$I = \sum_i m_i d_i^2 \text{ όπου } d_i \text{ η απόσταση της μάζας } i \text{ από τον άξονα περιστροφής. Έχουμε}$$

$$I = \sum_i m_i d_i^2 = 2m * 0 + 3m * 0 + m * (l \sin 30^\circ)^2 + 4m * (l \sin 30^\circ)^2 \\ = 5ml^2 \sin^2 30^\circ = (5/4)ml^2$$

4.(1,5M) Σώμα μάζας $m = 200 \text{ g}$ που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία επάνω σε οριζόντιο επίπεδο (που ορίζεται από τους άξονες x-z) μετατοπίζεται χωρίς τριβές επί του οριζόντιου επιπέδου υπό την επίδραση της δύναμης $\mathbf{F} = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ N}$. Α) Ποιο είναι το έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα; Β) Ποια η ταχύτητα του σώματος όταν έχει διανύσει απόσταση 1m από την αρχή;

Προτεινόμενη Λύση

Στο σώμα εκτός από τη δύναμη $\mathbf{F} = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ N}$ ασκείται η δύναμη του βάρους του $\mathbf{B} = -mg\mathbf{j}$ και η αντίδραση του επιπέδου που είναι ίση και αντίθετη με το βάρος.

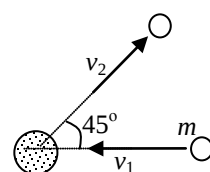
Α) Η δύναμη του βάρους (και η αντίδραση του επιπέδου) δεν παράγουν έργο καθώς είναι κάθετες στη διεύθυνση της μετατόπισης του σώματος.

Η δύναμη $\mathbf{F}$ αποτελείται από δύο συνιστώσες την $F_y = 2\text{N}$, που είναι κάθετη στη διεύθυνση μετατόπισης, και την $F_x = 4\text{N}$, που είναι παράλληλη και το έργο που παράγει για μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της για 1m είναι $W = F_x s = 4\text{N} * 1\text{m} = 4\text{Joule}$

Β) Δεδομένου ότι στο σώμα δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις έχουμε

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2W/m} = \sqrt{8/0.2} \text{ ms}^{-1} = 6.32 \text{ ms}^{-1}$$

5.(1,5M) Σωματίδιο μάζας $m = 10^{-12} \text{ kg}$ που κινείται με αρχική ταχύτητα $v_1 = 10^2 \text{ m/s}$ συγκρούεται με πολύ βαρύτερο σώμα. Μετά τη σύγκρουση το βαρύ σώμα παραμένει πρακτικά ακίνητο ενώ το σωματίδιο εκτρέπεται σε γωνία 45° (δείτε σχήμα) με ταχύτητα διπλάσια σε μέτρο από την αρχική. Αν υποθέσουμε ότι η διάρκεια της σύγκρουσης ήταν 10^{-6} s υπολογίστε το μέτρο (σε Newton) και τη διεύθυνση της (μέσης) δύναμης που ασκήθηκε μεταξύ των δύο σωματιδίων κατά τη σύγκρουση.



Προτεινόμενη Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{F}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{J}}{\Delta t}$ με $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{p}_{fin} - \mathbf{p}_{init}$ η μεταβολή της ορμής.

Έχουμε $\mathbf{p}_{init} = -mv_1\mathbf{i}$ και $\mathbf{p}_{fin} = mv_2 \cos 45^\circ \mathbf{i} + mv_2 \sin 45^\circ \mathbf{j}$ οπότε $\Delta \mathbf{J} = (mv_1 + mv_2 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + mv_2 \sin 45^\circ \mathbf{j}$

και $\mathbf{F}_{av} = \frac{m}{\Delta t} ((v_1 + v_2 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + v_2 \sin 45^\circ \mathbf{j}) = \frac{mv_1}{\Delta t} ((1 + 2 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + 2 \sin 45^\circ \mathbf{j})$ όπου χρησιμοποιήσαμε το

δεδομένο $v_2 = 2v_1$. Το μέτρο της δύναμης είναι

$$F_{av} = \frac{mv_1}{\delta t} \sqrt{\left(1 + 2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2.8 \frac{mv_1}{\delta t} = 2.8 \frac{10^{-12} \text{ kgr} \cdot 10^2 \text{ m/s}}{10^{-6} \text{ s}} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ N}$$

6.(2,5M) Ένα σωματίδιο γνωστής μάζας m , κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης: $\mathbf{r}(t) = -2\mathbf{i} + (-9 + 3t)\mathbf{j} - t(4 - t^2/3)\mathbf{k}$. Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α) Ποια η επιτάχυνση και η ταχύτητα του σωματιδίου σε μια τυχαία χρονική στιγμή; (0.75M)

(β) Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης όταν $t = 3\text{ s}$; (1M)

(γ) Ποια η απόσταση (σε μέτρα) του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 3\text{ s}$ από ένα άλλο που βρίσκεται ακίνητο στη θέση $\mathbf{r}_2 = (5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ m}$; (0.75M)

Προτεινόμενη Λύση

α) Έχουμε

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (4 - t^2)\mathbf{k} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad (1.2)$$

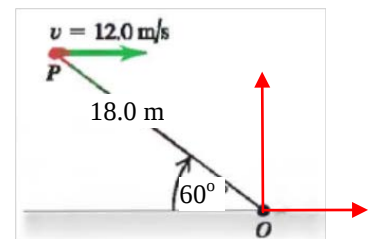
(β) όταν $t = 3\text{ s}$ έχουμε $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $\mathbf{a} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Για τον υπολογισμό της γωνίας χρησιμοποιούμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{a}| |\mathbf{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{v}|} \quad (1.3)$$

Όμως $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = 30 \text{ ms}^{-2} \text{ ms}^{-1}$, $|\mathbf{a}| = 6 \text{ ms}^{-2}$ και $|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ ms}^{-1}$ οπότε $\cos \theta = 30 / 6\sqrt{34} \approx 0.857 \Rightarrow \theta \approx 30.96^\circ$

(γ) η θέση του σωματιδίου όταν $t = 3\text{ s}$ είναι $\mathbf{r}_1 = -2\mathbf{i} + (-9 + 3 \cdot 3)\mathbf{j} - 3(4 - 3^2/3)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Η σχετική θέση των δύο σωματιδίων είναι $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (-2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = (7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ οπότε η μεταξύ τους απόσταση είναι $|\mathbf{r}_{12}| = \sqrt{7^2 + (-6)^2 + 6^2} \text{ m} = \sqrt{121} \text{ m} = 11 \text{ m}$

7.(1M) Μάζα $m = 10 \text{ Kgr}$ έχει οριζόντια ταχύτητα με μέτρο $v = 12.0 \text{ m/s}$ όταν βρίσκεται στο σημείο P. Σε αυτή τη χρονική στιγμή ποιο είναι το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής ως προς το σημείο O; Υπό ποιους όρους διατηρείται η στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων;



Προτεινόμενη Λύση

Η στροφορμή ορίζεται ως $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ όπου η θέση και ορμή του σωματιδίου εκφράζονται ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς. Έχουμε ως προς το σύστημα αναφοράς (δες σχήμα) με κέντρο το O:

$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m v \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ και $\mathbf{r} = -18 \cos 60 \mathbf{i} + 18 \sin 60 \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ οπότε

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -18 \cos 60 & 18 \sin 60 & 0 \\ m v & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18 m v \sin 60 \mathbf{k}$$

Συνεπώς $\mathbf{L} = -1870.61 \mathbf{k} \text{ Kgr m}^2 \text{ s}^{-1}$. Δηλαδή η στροφορμή έχει μέτρο $1870.61 \text{ Kgr m}^2 \text{ s}^{-1}$ και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα θέσης και το διάνυσμα της ταχύτητας. Η στροφορμή διατηρείται όταν οι ροπές όλων των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.